Bài tập chương 2

Dạng 1 : Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

Phương pháp : • Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng (α) và (β)

• Đường thẳng đi qua hai điểm chung ấy là giao tuyến cần tìm

Chú ý : Để tìm chung của (α) và (β) thường tìm 2 đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mp giao điểm nếu có của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng

Bài tập :

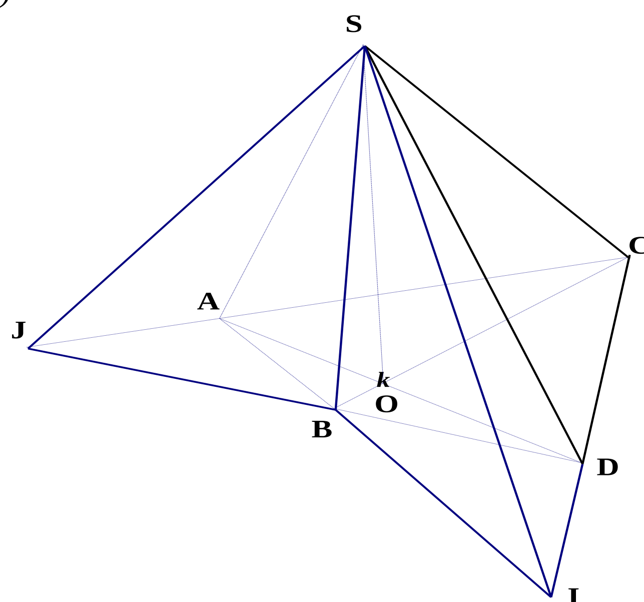
1. Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$ **có các cặp cạnh đối không song song và điểm** $S \notin (\alpha)$**.** **a. Xác định giao tuyến của** (SAC) **và** (SBD)

b. Xác định giao tuyến của *(SAB)* **và** *(SCD)*

c. Xác định giao tuyến của *(SAD)* **và** *(SBC)*

Giải

a. Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBD)



Ta có : S là điểm chung của (SAC) và (SBD)

Trong (α), gọi $O = AC \cap BD$

• $O \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$

• $O \in BD$ mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD)$

$\Rightarrow O$ là điểm chung của *(SAC)* và *(SBD)*

Vậy : SO là giao tuyến của *(SAC)* và *(SBD)*

b. Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD)

Ta có: S là điểm chung của *(SAC)* và *(SBD)*

Trong (α) , AB không song song với CD

Gọi $I = AB \cap CD$

• $I \in AB$ mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB)$

• $I \in CD$ mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD)$

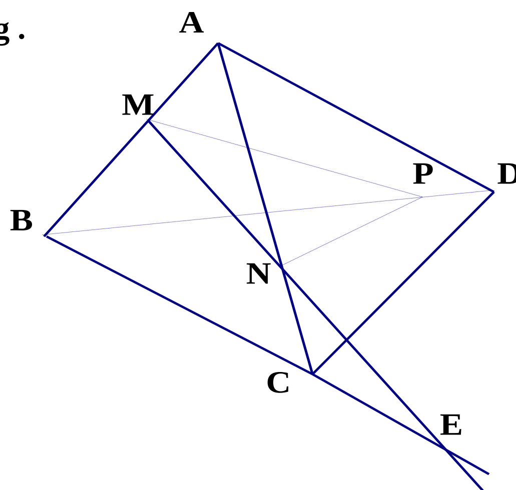
$\Rightarrow I$ là điểm chung của *(SAB)* và *(SCD)*

Vậy : SI là giao tuyến của *(SAB)* và *(SCD)*

c. Tương tự câu a, b

2. Cho bốn điểm *A,B,C,D* **không cùng thuộc một mặt phẳng . Trên các đoạn thẳng** *AB, AC, BD* **lần lượt lấy các điểm** *M, N, P* **sao cho** *MN* **không song song với** *BC***. Tìm giao tuyến của** *(BCD)* **và** *(MNP)*

Giải



• $P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$

• $P \in (MNP)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của *(BCD)* và *(MNP)*

Trong mp *(ABC)* , gọi $E = MN \cap BC$

• $E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

• $E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

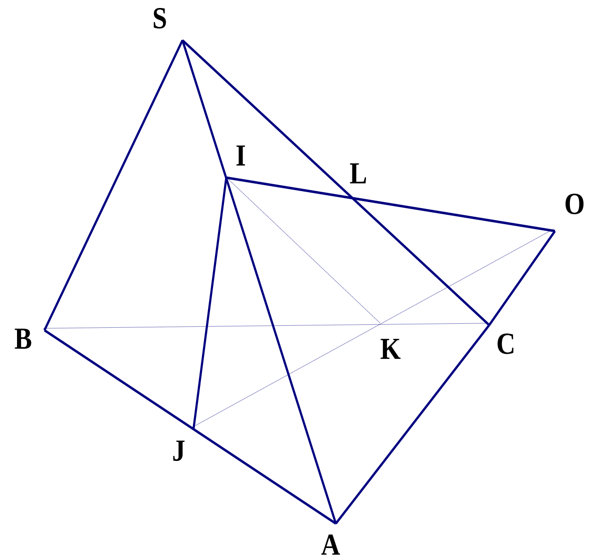
$\Rightarrow E$ là điểm chung của *(BCD) và (MNP)*

Vậy : PE là giao tuyến của *(BCD)* và *(MNP)*

3. Cho tam giác *ABC* và một điểm *S* không thuộc mp *(ABC)* , một điểm *I* thuộc đoạn *SA* .
Một đường thẳng *a* không song song với *AC* cắt các cạnh *AB, BC* theo thứ tự tại *J , K*.
Tìm giao tuyến của các cặp mp sau :
a. mp *(I,a)* và mp *(SAC)*
b. mp *(I,a)* và mp *(SAB)*
c. mp *(I,a)* và mp *(SBC)*

<u>Giải</u>

a. Tìm giao tuyến của mp (I,a) với mp (SAC) :

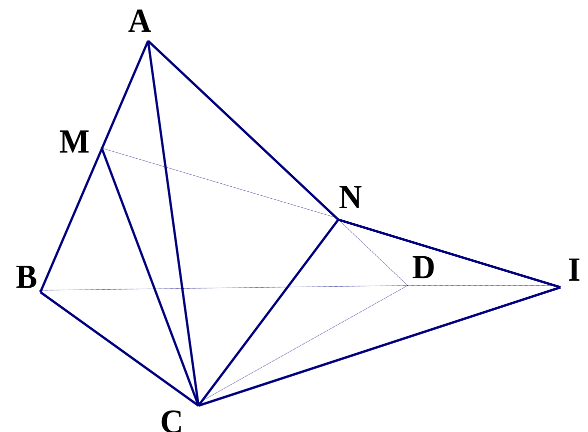


Ta có: $\bullet\, I \in SA$ mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$
$\bullet\, I \in (I,a)$
$\Rightarrow$ *I* là điểm chung của hai mp *(I,a)* và *(SAC)*
Trong *(ABC)*, *a* không song song với *AC*
Gọi $O = a \cap AC$
$\bullet\, O \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$
$\bullet\, O \in (I,a)$
$\Rightarrow$ *O* là điểm chung của hai mp *(I,a)* và *(SAC)*
Vậy : *IO* là giao tuyến của hai mp *(I,a)* và *(SAC)*
b. Tìm giao tuyến của mp (I,a) với mp (SAB) : là *JI*
c. Tìm giao tuyến của mp (I,a) với mp (SBC)
Ta có : *K* là điểm chung của hai mp *(I,a)* và *mp (SBC)*
Trong mp *(SAC)* , gọi $L = IO \cap SC$
$\bullet\, L \in SC$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow L \in (SBC)$
$\bullet\, L \in IO$ mà $IO \subset (I,a) \Rightarrow L \in (I,a)$
$\Rightarrow$ *L* là điểm chung của hai mp *(I,a)* và *(SBC)*
Vậy: *KL* là giao tuyến của hai mp *(I,a)* và *(SBC)*

4. Cho bốn điểm *A ,B ,C , D* không cùng nằm trong một mp
a. Chứng minh *AB* và *CD* chéo nhau
b. Trên các đoạn thẳng *AB* và *CD* lần lượt lấy các điểm *M, N* sao cho đường thẳng *MN* cắt đường thẳng *BD* tại *I* . Hỏi điểm *I* thuộc những mp nào .Xđ giao tuyến của hai mp *(CMN)* và *(BCD)*

<u>Giải</u>

a. Chứng minh AB và CD chéo nhau :



Giả sử *AB* và *CD* không chéo nhau
Do đó có mp *(α)* chứa *AB* và *CD*
$\Rightarrow$ *A ,B ,C , D* nằm trong mp *(α)* mâu thuẩn giả thuyết
Vậy : *AB* và *CD* chéo nhau
b. Điểm I thuộc những mp :
$\bullet\, I \in MN$ mà $MN \subset (ABD) \Rightarrow I \in (ABD)$
$\bullet\, I \in MN$ mà $MN \subset (CMN) \Rightarrow I \in (CMN)$
$\bullet\, I \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow I \in (BCD)$
Xđ giao tuyến của hai mp *(CMN)* và *(BCD) là CI*

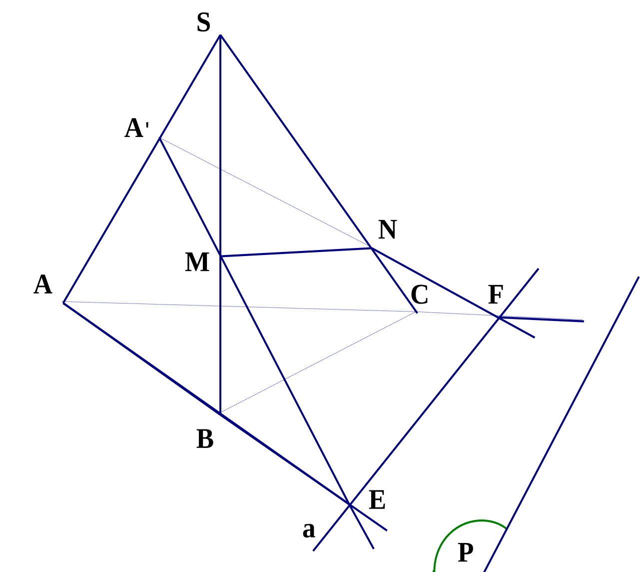
5. Cho tam giác *ABC* nằm trong mp *(P)* và *a* là mộtđường thẳng nằm trong mp *(P)* và không song song với *AB* và *AC* . *S* là một điểm ở ngoài mặt phẳng *(P)* và *A'* là một điểm thuộc *SA* .

Xđ giao tuyến của các cặp mp sau

a. mp *(A',a)* và *(SAB)*

b. mp *(A',a)* và *(SAC)*

c. mp *(A',a)* và *(SBC)*



Giải

a. Xđ giao tuyến của mp (A',a) và (SAB)

$\bullet A' \in SA$ mà $SA \subset (SAB) \Rightarrow A' \in (SAB)$

$\bullet A' \in (A',a)$

$\Rightarrow A'$ là điểm chung của (A',a) và (SAB)

Trong (P), ta có a không song song với AB

Gọi $E = a \cap AB$

$\bullet E \in AB$ mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow E \in (SAB)$

$\bullet E \in (A',a)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (A',a) và (SAB)

Vậy: $A'E$ là giao tuyến của (A',a) và (SAB)

b. Xđ giao tuyến của mp (A',a) và (SAC)

$\bullet A' \in SA$ mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow A' \in (SAC)$

$\bullet A' \in (A',a)$

$\Rightarrow A'$ là điểm chung của (A',a) và (SAC)

Trong (P), ta có a không song song với AC

Gọi $F = a \cap AC$

$\bullet F \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow F \in (SAC)$

$\bullet E \in (A',a)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của (A',a) và (SAC)

Vậy: $A'F$ là giao tuyến của (A',a) và (SAC)

c. Xđ giao tuyến của (A',a) và (SBC)

Trong (SAB), gọi $M = SB \cap A'E$

$\bullet M \in SB$ mà $SB \subset (SBC) \Rightarrow M \in (SBC)$

$\bullet M \in A'E$ mà $A'E \subset (A',a) \Rightarrow M \in (A',a)$

$\Rightarrow M$ là điểm chung của mp (A',a) và (SBC)

Trong (SAC), gọi $N = SC \cap A'F$

$\bullet N \in SC$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow N \in (SBC)$

$\bullet N \in A'F$ mà $A'F \subset (A',a) \Rightarrow N \in (A',a)$

$\Rightarrow N$ là điểm chung của mp (A',a) và (SBC)

Vậy: MN là giao tuyến của (A',a) và (SBC)

6. Cho tứ diện $ABCD$ **,** M **là một điểm bên trong tam giác** ABD **,** N **là một điểm bên trong tam giác** ACD **. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau**

a. *(AMN)* và *(BCD)*

b. *(DMN)* và *(ABC)*

Giải

a. Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD), gọi $E = AM \cap BD$

$\bullet E \in AM$ mà $AM \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$

$\bullet E \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của mp (AMN) và (BCD)

Trong *(ACD)* , gọi $F = AN \cap CD$

- $F \in AN$ mà $AN \subset (AMN) \Rightarrow F \in (AMN)$
- $F \in CD$ mà $CD \subset (BCD) \Rightarrow F \in (BCD)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của mp *(AMN)* và *(BCD)*

Vậy: *EF* là giao tuyến của mp *(AMN)* và *(BCD)*

b. Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong *(ABD)* , gọi $P = DM \cap AB$

- $P \in DM$ mà $DM \subset (DMN) \Rightarrow P \in (DMN)$
- $P \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow P \in (ABC)$

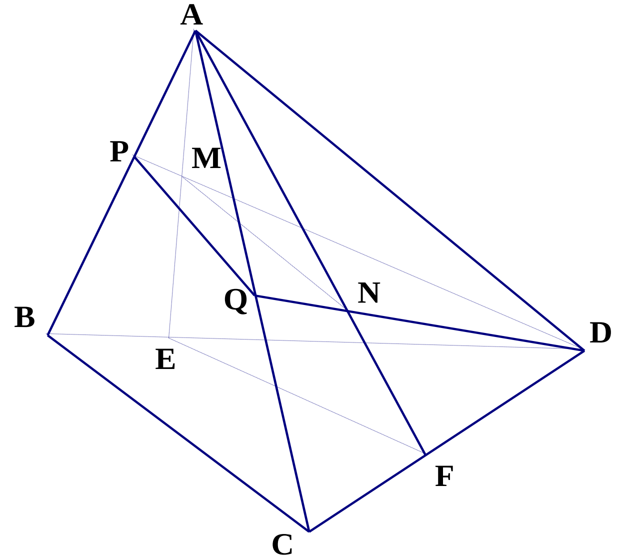
$\Rightarrow P$ là điểm chung của mp *(DMN)* và *(ABC)*

Trong *(ACD)* , gọi $Q = DN \cap AC$

- $Q \in DN$ mà $DN \subset (DMN) \Rightarrow Q \in (DMN)$
- $Q \in AC$ mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow Q \in (ABCA)$

$\Rightarrow Q$ là điểm chung của mp *(DMN)* và *(ABC)*

Vậy: *PQ* là giao tuyến của mp *(DMN)* và *(ABC)*



Dạng 2 : Xác định giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α)

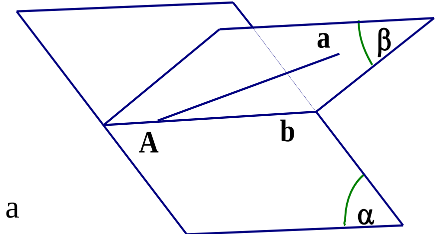
Phương pháp : • Tìm đường thẳng *b* nằm trong mặt phẳng (α)

• Giao điểm của *a* và *b* là giao đt *a* và mặt phẳng (α)

Chú ý : Đường thẳng b thường là giao tuyến của mp (α) và mp (β) ⊃ a

Cần chọn mp (β) chứa đường thẳng a sao cho giao tuyến của

mp (α) và mp (β) dể xác định và giao tuyến không song song với đường thẳng a



Bài tập :

1. Trong mp (α) cho tam giác ABC . Một điểm S không thuộc (α) . Trên cạnh AB lấy một điểm P và trên các đoạn thẳng SA, SB ta lấy lần lượt hai điểm M, N sao cho MN không song song với AB .

a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC)

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (α)

Giải

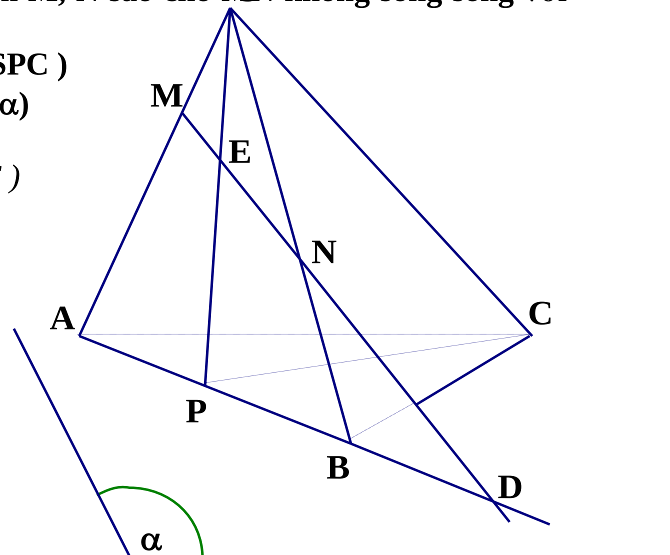
a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC)

Cách 1 : Trong (SAB) , gọi E = SP ∩ MN

- E ∈ SP mà SP ⊂ (SPC) ⇒ E ∈(SPC)
- E ∈ MN

Vậy : E = MN ∩ (SPC)

Cách 2 :
- Chọn mp phụ (SAB) ⊃ MN
- (SAB) ∩ (SPC) = SP
- Trong (SAB), gọi E = MN ∩ SP



$E \in MN$

$E \in SP$ mà $SP \subset (SPC)$

Vậy : $E = MN \cap (SPC)$

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mp (α)

Cách 1: Trong (SAB) , MN không song song với AB

Gọi $D = AB \cap MN$

- $D \in AB$ mà $AB \subset (\alpha) \Rightarrow D \in (\alpha)$
- $D \in MN$

Vậy: $D = MN \cap (\alpha)$

Cách 2 :
- Chọn mp phụ $(SAB) \supset MN$
- $(SAB) \cap (\alpha) = AB$
- Trong (SAB) , MN không song song với AB

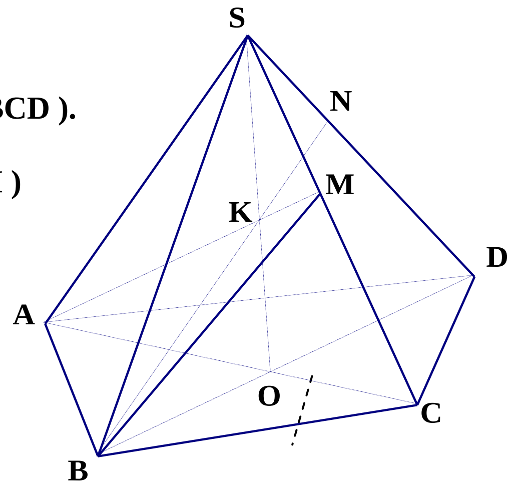
Gọi $D = MN \cap AB$

$D \in AB$ mà $AB \subset (\alpha) \Rightarrow D \in (\alpha)$

$D \in MN$

Vậy : $D = MN \cap (\alpha)$

2. Cho tứ giác ABCD và một điểm S không thuộc mp (ABCD).
Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C .
Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM)



Giải

- Chọn mp phụ $(SBD) \supset SD$
- Tìm giao tuyến của hai mp (SBD) và (ABM)
  - Ta có B là điểm chung của (SBD) và (ABM)
  - Tìm điểm chung thứ hai của (SBD) và (ABM)

Trong (ABCD) , gọi $O = AC \cap BD$

Trong (SAC) , gọi $K = AM \cap SO$

$K \in SO$ mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow K \in (SBD)$

$K \in AM$ mà $AM \subset (ABM) \Rightarrow K \in (ABM)$

$\Rightarrow$ K là điểm chung của (SBD) và (ABM)

$\Rightarrow (SBD) \cap (ABM) = BK$

- Trong (SBD) , gọi $N = SD \cap BK$

$N \in BK$ mà $BK \subset (AMB) \Rightarrow N \in (ABM)$

$N \in SD$

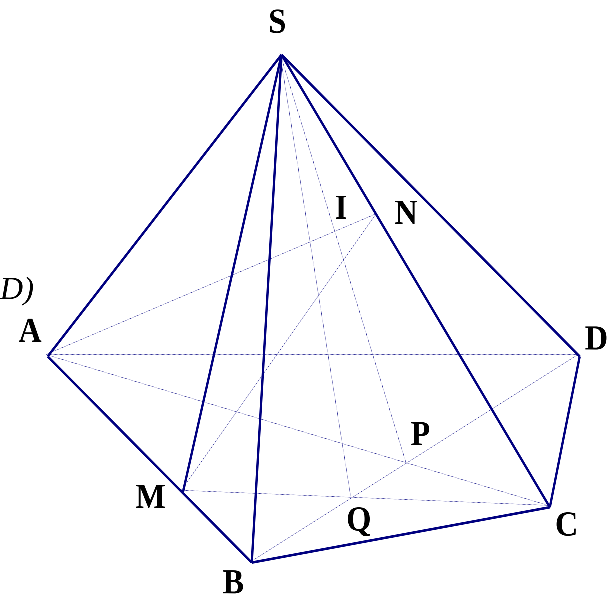
Vậy : $N = SD \cap (ABM)$

3. Cho tứ giác ABCD và một điểm S không thuộc mp (ABCD). Trên đoạn AB lấy một điểm M ,
Trên đoạn SC lấy một điểm N (M , N không trùng với các đầu mút) .
a. Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD)
b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD)

Giải

a. Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD)

- Chọn mp phụ $(SAC) \supset AN$
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD)



- Trong (SAC), gọi I = AN ∩ SP
  I ∈ AN
  I ∈ SP mà SP ⊂ (SBD) ⇒ I ∈ (SBD)

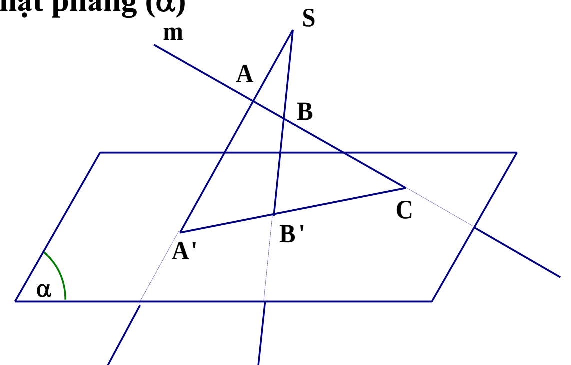
Vậy : I = AN ∩ (SBD)

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD)

- Chọn mp phụ (SMC) ⊃ MN
- Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD)
  Trong (ABCD) , gọi Q = MC ∩ BD
  ⇒ (SAC) ∩ (SBD) = SQ
- Trong (SMC), gọi J = MN ∩ SQ
  J∈ MN
  J ∈ SQ mà SQ ⊂ (SBD) ⇒ J ∈ (SBD)

Vậy: J = MN ∩ (SBD)

4. Cho một mặt phẳng (α) và một đường thẳng m cắt mặt phẳng (α) tại C . Trên m ta lấy hai điểm A, B và một điểm S trong không gian . Biết giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (α) là điểm A' . Hãy xác định giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (α)

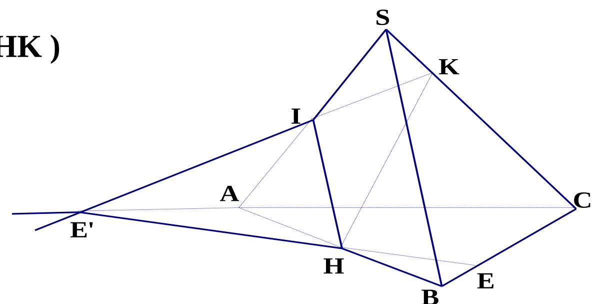


Giải

- Chọn mp phụ (SA'C) ⊃ SB
- Tìm giao tuyến của (SA'C) và (α)
  Ta có (SA'C) ∩ (α) = A'C
- Trong (SA'C), gọi B' = SB ∩ A'C
  B'∈ SB mà SB ⊂ (SA'C) ⇒ B' ∈ (SA'C)
  B' ∈ A'C mà A'C ⊂ (α) ⇒ B' ∈ (α)

Vậy : B'= SB ∩ (α)

5. Cho bốn điểm A, B , C, S không cùng ở trong một mặt phẳng . Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB .Trên SC lấy điểm K sao cho : CK = 3KS.
Tìm giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK)



Giải

- Chọn mp phụ (ABC) ⊃ BC
- Tìm giao tuyến của (ABC) và (IHK)
  Trong (SAC) ,có IK không song song với AC
  Gọi E' = AC ∩ IK

  ⇒ (ABC) ∩ (IHK) = HE'
- Trong (ABC), gọi E = BC ∩ HE'
  E ∈ BC mà BC ⊂ (ABC) ⇒ E ∈ (ABC)
  E ∈ HE' mà HE' ⊂ (IHK) ⇒ E ∈ (IHK)

Vậy: E = BC ∩ (IHK)

6. Cho tứ diện SABC .Gọi D là điểm trên SA , E là điểm trên SB và F là điểm trên AC (DE và AB không song song) .

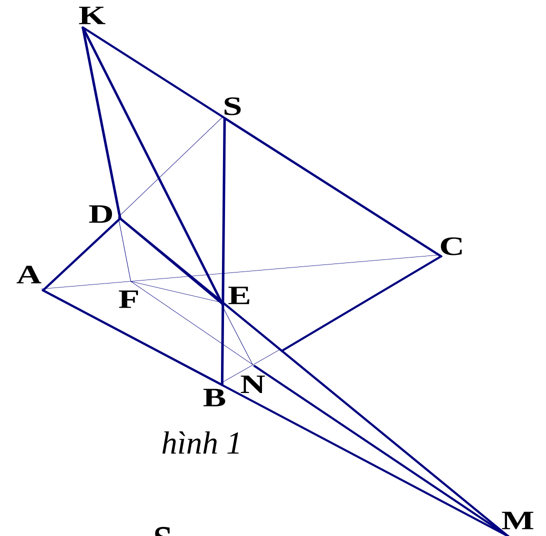
a. Xđ giao tuyến của hai mp (DEF) và (ABC)

b. Tìm giao điểm của BC với mặt phẳng (DEF)

c. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (DEF)

Giải

a. Xđ giao tuyến của hai mp (DEF) và (ABC)



hình 1

Ta có : F là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF)

Trong (SAB) , AB không song song với DE

Gọi M = AB ∩ DE

- M ∈ AB mà AB ⊂ (ABC) ⇒ M ∈ (ABC)
- M ∈ DE mà DE ⊂ (DEF) ⇒ M ∈ (DEF)

⇒ M là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF)

Vậy: FM là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF)

b. Tìm giao điểm của BC với mặt phẳng (DEF)

- Chọn mp phụ (ABC) ⊃ BC
- Tìm giao tuyến của (ABC) và (DEF)

Ta có (ABC) ∩ (DEF) = FM

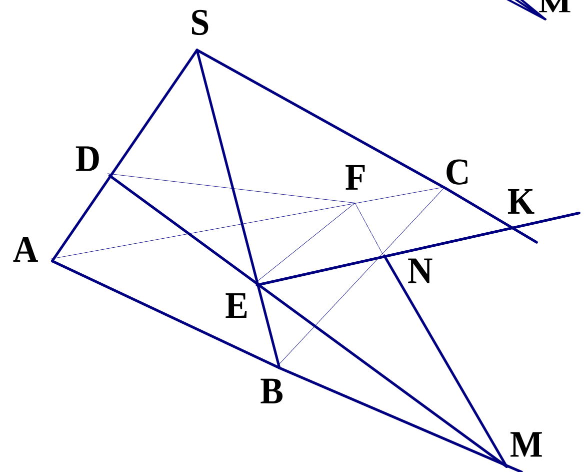
- Trong (ABC), gọi N = FM ∩ BC

N∈ BC

N ∈ FM mà FM ⊂ (DEF) ⇒ N ∈ (DEF)

Vậy: N = BC ∩ (DEF)

c. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (DEF)



hình 2

- Chọn mp phụ (SBC) ⊃ SC
- Tìm giao tuyến của (SBC) và (DEF)

Ta có: E là điểm chung của (SBC) và (DEF)

o N ∈ BC mà BC ⊂ (SBC) ⇒ N ∈ (SBC)

o N ∈ FM mà FM ⊂ (DEF) ⇒ N ∈ (DEF)

⇒ N là điểm chung của (SBC) và (DEF)

Ta có (SBC) ∩ (DEF) = EN

- Trong (SBC), gọi K = EN ∩ SC

K∈ SC

K ∈ EN mà EN ⊂ (DEF) ⇒ K ∈ (DEF)

Vậy: K = SC ∩ (DEF)

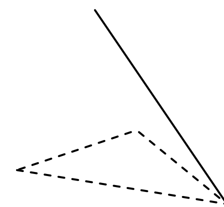
7. Cho hình chóp S.ABCD .Gọi O là giao điểm của AC và BD . M, N, P lần lượt là các điểm trên SA, SB ,SD.

a. Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP)

b. Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP)

Giải

a. Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP)



- Chọn mp phụ (SBD) ⊃ SO
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (MNP)

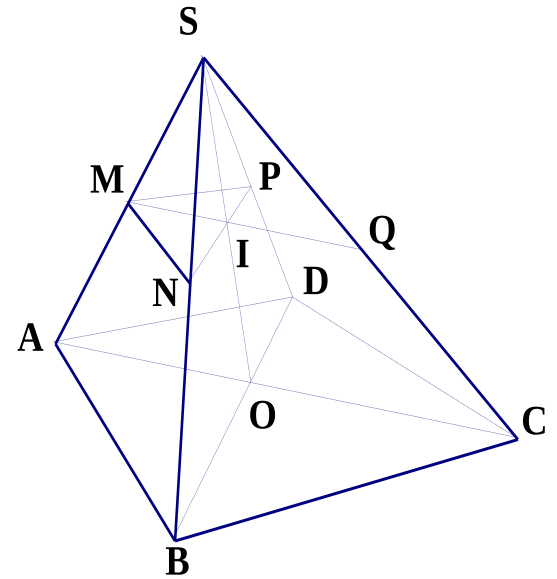
Ta có N ∈ MN mà MN ⊂ (MNP) ⇒ N ∈ (MNP)

N ∈ SB mà SB ⊂ (SBD) ⇒ N ∈ (SBD)

⇒ N là điểm chung của (SBD) và (MNP)

P ∈ MP mà MN ⊂ (MNP) ⇒ P ∈ (MNP)

P ∈ SD mà SD ⊂ (SBD) ⇒ P ∈ (SBD)



$\Rightarrow$ P là điểm chung của (SBD) và (MNP)

$\Rightarrow$ (MNP) $\cap$ (SBD) = NP

- Trong (SBD), gọi I = SO $\cap$ NP

  I $\in$ SO

  I $\in$ NP mà NP $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ I $\in$ (MNP)

Vậy: I = SO $\cap$ (MNP)

b. Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP)

• Chọn mp phụ (SAC) $\supset$ SC

- Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP)

  Ta có M $\in$ MN mà MN $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ M $\in$ (MNP)

  M $\in$ SA mà SA $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ M $\in$ (SAC)

  $\Rightarrow$ M là điểm chung của (SAC) và (MNP)

  I $\in$ MI mà MI $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ I $\in$ (MNP)

  I $\in$ SO mà SO $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ I $\in$ (SAC)

  $\Rightarrow$ I là điểm chung của (SAC) và (MNP)

  $\Rightarrow$ (SAC) $\cap$ (SBD) = MI

- Trong (SAC), gọi Q = SC $\cap$ MI

  Q$\in$ SC

  Q$\in$ MI mà MI $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ Q $\in$ (MNP)

Vậy: Q = SC $\cap$ (MNP)

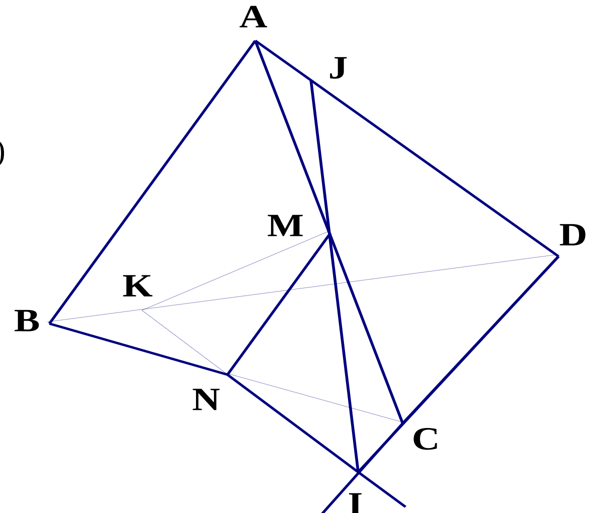
8. Cho tứ diện ABCD .Gọi M,N lần lượt là trung điểm AC và BC . K là điểm trên BD và không trùng với trung điểm BD .

a. Tìm giao điểm của CD và (MNK)

b. Tìm giao điểm của AD và (MNK)

Giải

a. Tìm giao điểm của CD và (MNK) :



• Chọn mp phụ (BCD) $\supset$ SC

- Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNK)

  Ta có N $\in$ (MNK)

  N $\in$ BC mà BC $\subset$ (BCD) $\Rightarrow$ N $\in$ (BCD)

  $\Rightarrow$ N là điểm chung của (BCD) và (MNK)

  K $\in$ (MNK)

  K $\in$ BD mà BD $\subset$ (BCD) $\Rightarrow$ K $\in$ (BCD)

  $\Rightarrow$ K là điểm chung của (BCD) và (MNK)

  $\Rightarrow$ (BCD) $\cap$ (MNK) = NK

- Trong (BCD), gọi I = CD $\cap$ NK

  I$\in$ CD

  I$\in$ NK mà NK $\subset$ (MNK) $\Rightarrow$ I $\in$ (MNK)

Vậy: I = CD $\cap$ (MNK)

b. Tìm giao điểm của AD và (MNK)

• Chọn mp phụ (ACD) $\supset$ AD

- Tìm giao tuyến của (ACD) và (MNK)

  Ta có: M $\in$ (MNK)

  M $\in$ AC mà AC $\subset$ (ACD) $\Rightarrow$ M $\in$ (ACD)

⇒ M là điểm chung của (ACD) và (MNK)

I∈ NK mà NK ⊂ (MNK) ⇒ I ∈ (MNK)

I ∈ CD mà CD ⊂ (ACD) ⇒ I ∈ (ACD)

⇒ I là điểm chung của (ACD) và (MNK)

⇒ (ACD) ∩ (MNK) = MI

- Trong (BCD), gọi J = AD ∩ MI

J∈ AD

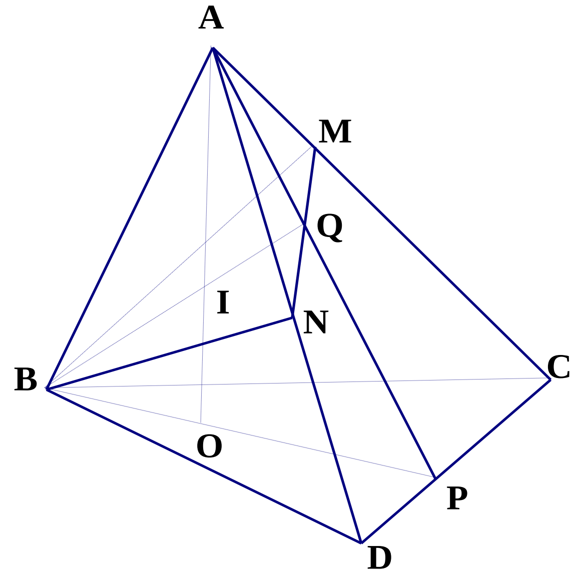
J∈ MI mà MI ⊂ (MNK) ⇒ J ∈ (MNK)

Vậy: J = AD ∩ (MNK)

9. Cho tứ diện ABCD .Gọi M,N là hai điểm trên AC và AD . O là điểm bên trong tamgiác BCD. Tìm giao điểm của :

a. MN và (ABO)

b. AO và (BMN)



Giải

a. Tìm giao điểm của MN và (ABO):

- Chọn mp phụ (ACD) ⊃ MN
- Tìm giao tuyến của (ACD) và (ABO)

Ta có : A là điểm chung của (ACD) và (ABO)

Trong (BCD), gọi P = BO ∩ DC

P∈ BO mà BO ⊂ (ABO) ⇒ P ∈ (ABO)

P∈ CD mà CD ⊂ (ACD) ⇒ P ∈ (ACD)

⇒ P là điểm chung của (ACD) và (ABO)

⇒ (ACD) ∩ (ABO) = AP

- Trong (ACD), gọi Q = AP ∩ MN

Q∈ MN

Q∈ AP mà AP ⊂ (ABO) ⇒ Q ∈ (ABO)

Vậy: Q = MN ∩ (ABO)

b. Tìm giao điểm của AO và (BMN) :

- Chọn mp (ABP) ⊃ AO
- Tìm giao tuyến của (ABP) và (BMN)

Ta có : B là điểm chung của (ABP) và (BMN)

Q ∈ MN mà MN ⊂ (BMN) ⇒ Q ∈ (BMN)

Q ∈ AP mà AP ⊂ (ABP) ⇒ Q ∈ (ABP)

⇒ Q là điểm chung của (ABP) và (BMN)

⇒ (ABP) ∩ (BMN) = BQ

- Trong (ABP), gọi I = BQ ∩ AO

I∈ AO

I∈ BQ mà BQ ⊂ (BMN) ⇒ I ∈ (BMN)

Vậy: I = AO ∩ (BMN)

10. Trong mp (α) cho hình thang ABCD , đáy lớn AB . Gọi I ,J, K lần lượt là các điểm trên SA, AB,

BC (K không là trung điểm BC) . Tìm giao điểm của :

a. IK và (SBD)

b. SD và (IJK)

c. SC và (IJK)

Giải

a. Tìm giao điểm của IK và (SBD)

- Chọn mp phụ (SAK) $\supset$ IK
- Tìm giao tuyến của (SAK) và (SBD)

Ta có : S là điểm chung của (SAK) và (SBD)

Trong (ABCD), gọi P = AK $\cap$ BD

P $\in$ AK mà AK $\subset$ (SAK) $\Rightarrow$ P $\in$ (SAK)

P $\in$ BD mà BD $\subset$ (SBD) $\Rightarrow$ P $\in$ (SBD)

$\Rightarrow$ P là điểm chung của (SAK) và (SBD)

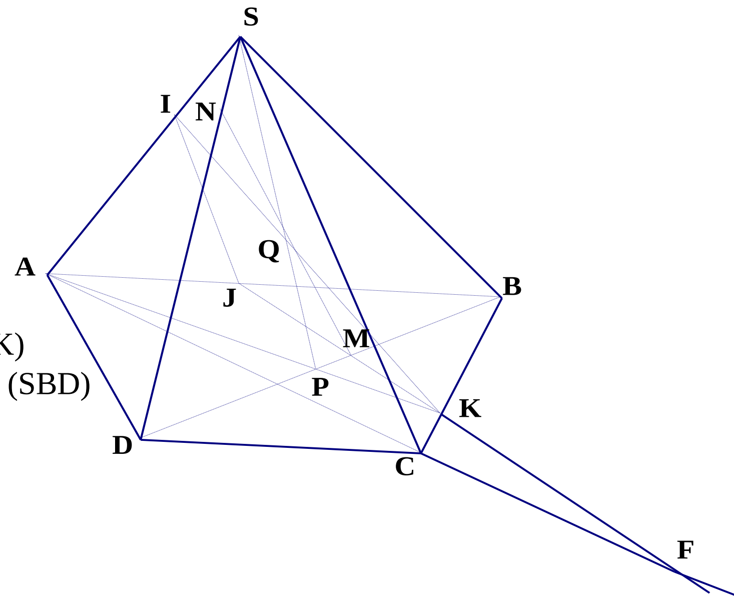
$\Rightarrow$ (SAK) $\cap$ (SBD) = SP

- Trong (SAK), gọi Q = IK $\cap$ SP

Q $\in$ IK

Q $\in$ SP mà SP $\subset$ (SBD) $\Rightarrow$ Q $\in$ (SBD)

Vậy: Q = IK $\cap$ (SBD)



b. Tìm giao điểm của SD và (IJK) :

- Chọn mp phụ (SBD) $\supset$ SD
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (IJK)

Ta có : Q là điểm chung của (IJK) và (SBD)

Trong (ABCD), gọi M = JK $\cap$ BD

M $\in$ JK mà JK $\subset$ (IJK) $\Rightarrow$ M $\in$ (IJK)

M $\in$ BD mà BD $\subset$ (SBD) $\Rightarrow$ M $\in$ (SBD)

$\Rightarrow$ M là điểm chung của (IJK) và (SBD)

$\Rightarrow$ (IJK) $\cap$ (SBD) = QM

- Trong (SBD), gọi N = QM $\cap$ SD

N $\in$ SD

N $\in$ QM mà QM $\subset$ (IJK) $\Rightarrow$ N $\in$ (IJK)

Vậy: N = SD $\cap$ (IJK)

c. Tìm giao điểm của SC và (IJK) :

- Chọn mp phụ (SAC) $\supset$ SC
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (IJK)

Ta có : I là điểm chung của (IJK) và (SAC)

Trong (ABCD), gọi E = AC $\cap$ JK

E $\in$ JK mà JK $\subset$ (IJK) $\Rightarrow$ E $\in$ (IJK)

E $\in$ AC mà AC $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ E $\in$ (SAC)

$\Rightarrow$ E là điểm chung của (IJK) và (SAC)

$\Rightarrow$ (IJK) $\cap$ (SAC) = IE

- Trong (SAC), gọi F = IE $\cap$ SC

F $\in$ SC

F $\in$ IE mà IE $\subset$ (IJK) $\Rightarrow$ F $\in$ (IJK)

Vậy : F = SC $\cap$ (IJK)

11.Cho tứ diện ABCD . Trên AC và AD lấy hai điểm M,N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD.

a. Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD)
b. Tìm giao điểm của BC với (OMN)
c. Tìm giao điểm của BD với (OMN)

Giải

a. Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD):

Ta có : O là điểm chung của (OMN) và (BCD)

Trong (ACD) , MN không song song CD

Gọi $I = MN \cap CD$

$\Rightarrow$ I là điểm chung của (OMN) và (BCD)

Vậy : $OI = (OMN) \cap (BCD)$

b. Tìm giao điểm của BC với (OMN):

Trong (BCD), gọi $P = BC \cap OI$

Vậy : $P = BC \cap (OMN)$

c. Tìm giao điểm của BD với (OMN):

Trong (BCD), gọi $Q = BD \cap OI$

Vậy : $Q = BD \cap (OMN)$

12.Cho hình chóp S.ABCD . Trong tam giác SBC lấy điểm M trong tam giác SCD lấy điểm N
a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAC)
b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN)

Giải

a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAC) :

- Chọn mp phụ $(SMN) \supset MN$
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SMN)

  Ta có : S là điểm chung của (SAC) và (SMN)

  Trong (SBC), gọi $M' = SM \cap BC$

  Trong (SCD), gọi $N' = SN \cap CD$

  Trong (ABCD), gọi $I = M'N' \cap AC$

  $I \in M'N'$ mà $M'N' \subset (SMN) \Rightarrow I \in (SMN)$

  $I \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$

  $\Rightarrow$ I là điểm chung của (SMN) và (SAC)

  $\Rightarrow (SMN) \cap (SAC) = SI$
- Trong (SMN), gọi $O = MN \cap SI$

  $O \in MN$

  $O \in SI$ mà $SI \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$

Vậy : $O = MN \cap (SAC)$

b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN) :

- Chọn mp phụ $(SAC) \supset SC$
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (AMN)

  Ta có : $(SAC) \cap (AMN) = AO$
- Trong (SAC), gọi $E = AO \cap SC$

  $E \in SC$

  $E \in AO$ mà $AO \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$

Vậy : $E = SC \cap (AMN)$

Dạng 3 : Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp :
- Chứng minh ba điểm đó cùng thuộc hai mp phân biệt
- Khi đó ba điểm thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mp

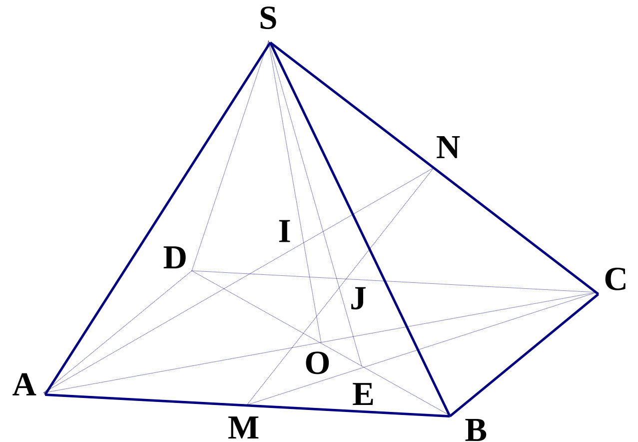
Bài tập :

1. Cho hình bình hành ABCD . S là điểm không thuộc (ABCD) ,M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC .

a. Xác định giao điểm I = AN ∩ (SBD)

b. Xác định giao điểm J = MN ∩ (SBD)

c. Chứng minh I , J , B thẳng hàng



Giải

a. Xác định giao điểm I = AN ∩ (SBD)

- Chọn mp phụ (SAC) ⊃ AN
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD)

⇒ (SAC) ∩ (SBD) = SO

- Trong (SAC), gọi I = AN ∩ SO

I ∈ AN

I ∈ SO mà SO ⊂ (SBD) ⇒ I ∈ (SBD)

Vậy: I = AN ∩ (SBD)

b. Xác định giao điểm J = MN ∩ (SBD)

- Chọn mp phụ (SMC) ⊃ MN
- Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD)

S là điểm chung của (SMC) và (SBD)

Trong (ABCD) , gọi E = MC ∩ BD

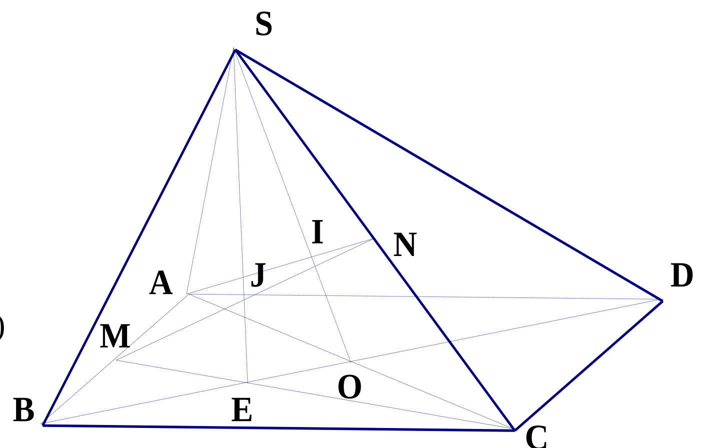
⇒ (SAC) ∩ (SBD) = SE

- Trong (SMC), gọi J = MN ∩ SE

J∈ MN

J∈ SE mà SE ⊂ (SBD) ⇒ J ∈ (SBD)

Vậy J = MN ∩ (SBD)



c. Chứng minh I , J , B thẳng hàng

Ta có : B là điểm chung của (ANB) và (SBD)

- I ∈ SO mà SO ⊂ (SBD) ⇒ I ∈ (SBD)
- I ∈ AN mà AN ⊂ (ANB) ⇒ I ∈ (ANB)

⇒ I là điểm chung của (ANB) và (SBD)

- J ∈ SE mà SE ⊂ (SBD) ⇒ J∈ (SBD)
- J ∈ MN mà MN ⊂ (ANB) ⇒ J ∈ (ANB)

⇒ J là điểm chung của (ANB) và (SBD)

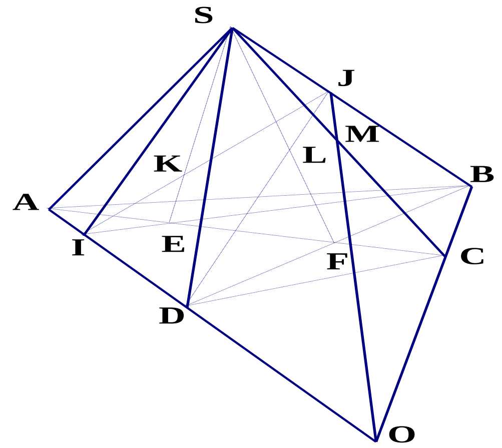
Vậy : B , I , J thẳng hàng

2. Cho tứ giác ABCD và S ∉ (ABCD). Gọi I , J là hai điểm trên AD và SB , AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M .

a. Tìm giao điểm K = IJ ∩ (SAC)

b. Xác định giao điểm L = DJ ∩ (SAC)

c. Chứng minh A ,K ,L ,M thẳng hàng



Giải

a. Tìm giao điểm K = IJ ∩ (SAC)

• Chọn mp phụ (SIB) ⊃ IJ

• Tìm giao tuyến của (SIB) và (SAC)

S là điểm chung của (SIB) và (SAC)

Trong (ABCD) , gọi E = AC ∩ BI

⇒ (SIB) ∩ (SAC) = SE

• Trong (SIB), gọi K = IJ ∩ SE

K∈ IJ

K∈ SE mà SE ⊂ (SAC) ⇒ K ∈ (SAC)

Vậy: K = IJ ∩ (SAC)

b. Xác định giao điểm L = DJ ∩ (SAC)

• Chọn mp phụ (SBD) ⊃ DJ

• Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC)

S là điểm chung của (SBD) và (SAC)

Trong (ABCD) , gọi F = AC ∩ BD

⇒ (SBD) ∩ (SAC) = SF

• Trong (SBD), gọi L = DJ ∩ SF

L∈ DJ

L∈ SF mà SF ⊂ (SAC) ⇒ L ∈ (SAC)

Vậy : L = DJ ∩ (SAC)

c. Chứng minh A ,K ,L ,M thẳng hàng

Ta có :A là điểm chung của (SAC) và (AJO)

• K ∈ IJ mà IJ ⊂ (AJO) ⇒ K∈ (AJO)

• K ∈ SE mà SE ⊂ (SAC) ⇒ K ∈ (SAC)

⇒ K là điểm chung của (SAC) và (AJO)

• L ∈ DJ mà DJ ⊂ (AJO) ⇒ L ∈ (AJO)

• L ∈ SF mà SF ⊂ (SAC) ⇒ L ∈ (SAC)

⇒ L là điểm chung của (SAC) và (AJO)

• M ∈ JO mà JO ⊂ (AJO) ⇒ M ∈ (AJO)

• M ∈ SC mà SC ⊂ (SAC) ⇒ M ∈ (SAC)

⇒ M là điểm chung của (SAC) và (AJO)

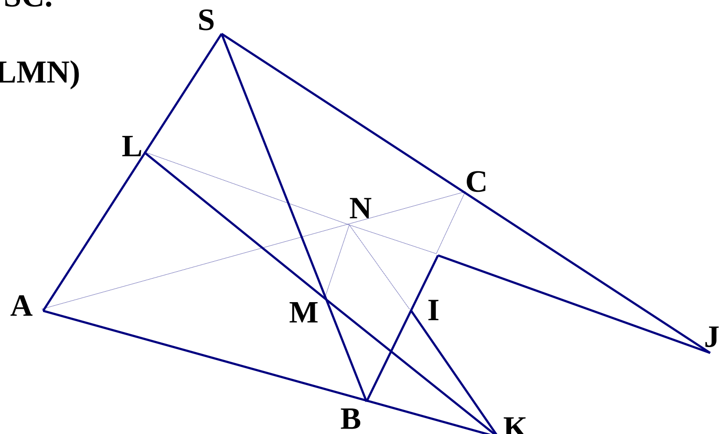
Vậy : A ,K ,L ,M thẳng hàng

3. Cho tứ diện SABC.Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC.

a. Tìm giao tuyến của mp (LMN) và (ABC)

b. Tìm giao điểm I = BC ∩ (LMN) và J = SC ∩ (LMN)

c. Chứng minh M , I , J thẳng hàng



Giải

a. *Tìm giao tuyến của mp (LMN) và (ABC)*

Ta có : N là điểm chung của (LMN) và (ABC)

Trong (SAB) , LM không song song với AB

Gọi K = AB ∩ LM

$K \in LM$ mà $LM \subset (LMN) \Rightarrow K \in (LMN)$

$K \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC)$

b. Tìm giao điểm I = BC ∩ (LMN)

• Chọn mp phụ $(ABC) \supset BC$

• Tìm giao tuyến của (ABC) và (LMN)

$\Rightarrow (ABC) \cap (LMN) = NK$

• Trong (ABC), gọi $I = NK \cap BC$

$I \in BC$

$I \in NK$ mà $NK \subset (LMN) \Rightarrow I \in (LMN)$

Vậy : $I = BC \cap (LMN)$

<u>Tìm giao điểm J = SC ∩ (LMN)</u>

• Trong (SAC), LN không song song với SC

gọi $J = LN \cap SC$

$J \in SC$

$J \in LN$ mà $LN \subset (LMN) \Rightarrow J \in (LMN)$

Vậy : $J = SC \cap (LMN)$

c. Chứng minh M , I , J thẳng hàng

Ta có : M , I , J là điểm chung của (LMN) và (SBC)

Vậy : M , I , J thẳng hàng

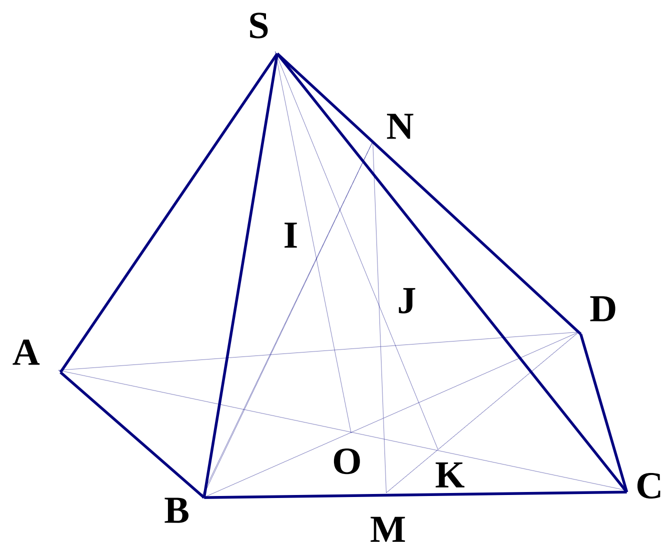
4. Cho tứ giác ABCD và S ∉ (ABCD). Gọi M , N là hai điểm trên BC và SD.

a. Tìm giao điểm I = BN ∩ (SAC)

b. Tìm giao điểm J = MN ∩ (SAC)

c. Chứng minh C , I , J thẳng hàng

<u>Giải</u>



a. Tìm giao điểm I = BN ∩ (SAC)

• Chọn mp phụ $(SBD) \supset BN$

• Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC)

Trong (ABCD), gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow (SBD) \cap (SAC) = SO$

• Trong (SBD), gọi $I = BN \cap SO$

$I \in BN$

$I \in SO$ mà $SO \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$

Vậy : $I = BN \cap (SAC)$

b. Tìm giao điểm J = MN ∩ (SAC) :

• Chọn mp phụ $(SMD) \supset MN$

• Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAC)

Trong (ABCD), gọi $K = AC \cap DM$

$\Rightarrow (SMD) \cap (SAC) = SK$

• Trong (SMD), gọi $J = MN \cap SK$

$J \in MN$

$J \in SK$ mà $SK \subset (SAC) \Rightarrow J \in (SAC)$

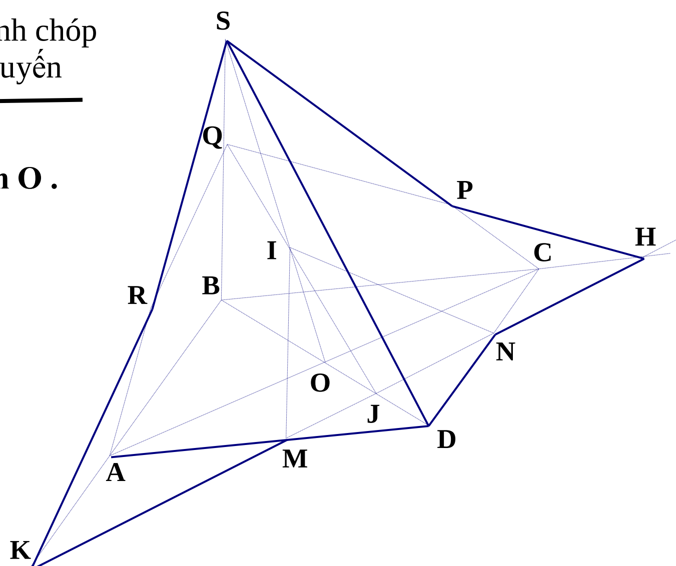
Vậy : $J = MN \cap (SAC)$

c. Chứng minh C , I , J thẳng hàng :

Ta có : C , I , J là điểm chung của (BCN) và (SAC)
Vậy : C , I , J thẳng hàng

Dạng 4 : Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α) :

Chú ý : Mặt phẳng (α) có thể chỉ cắt một số mặt của hình chóp
Cách 1 : Xác định thiết diện bằng cách kéo dài các giao tuyến



Bài tập :

1. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O .
Gọi M, N , I là ba điểm lấy trên AD , CD , SO .
Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI)

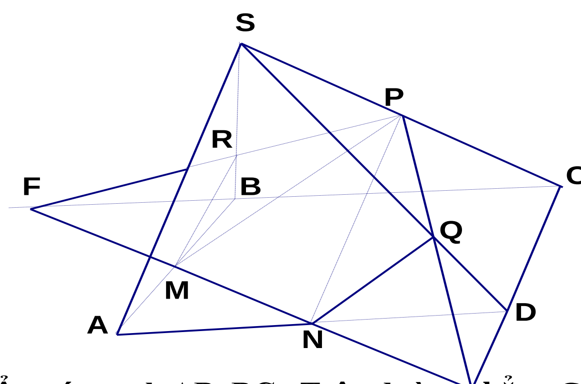
Giải

Trong (ABCD), gọi J = BD ∩ MN
K = MN ∩ AB
H = MN ∩ BC
Trong (SBD), gọi Q = IJ ∩ SB
Trong (SAB), gọi R = KQ ∩ SA
Trong (SBC), gọi P = QH ∩ SC
Vậy : thiết diện là ngũ giác MNPQR

2. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N , P lần lượt là trung điểm lấy trên AB , AD và SC .
Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

Giải

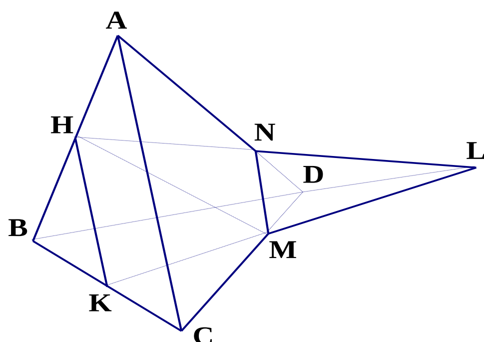
Trong (ABCD) , gọi E = MN ∩ DC
F = MN ∩ BC
Trong (SCD) , gọi Q = EP ∩ SD
Trong (SBC) , gọi R = FP ∩ SB
Vậy : thiết diện là ngũ giác MNPQR

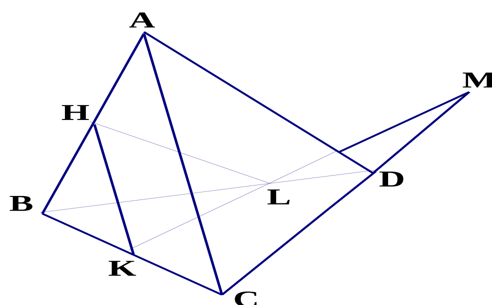


3. Cho tứ diện ABCD . Gọi H,K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M sao cho KM không song song với BD . Tìm thiết diện của tứ diện với mp (HKM).
Xét 2 .trường hợp :
a. M ở giữa C và D
b. M ở ngoài đoạn CD

Giải

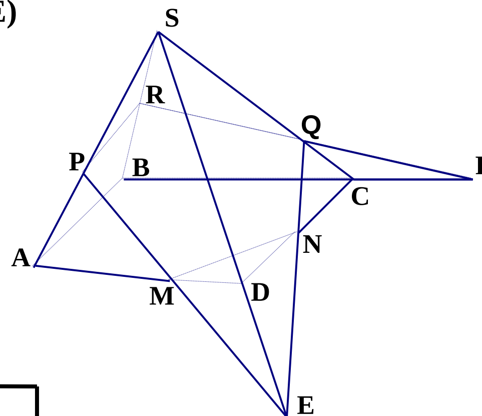
a. M ở giữa C và D :
Ta có : HK , KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD)
Trong (BCD), gọi L = KM ∩ BD
Trong (ABD), gọi N = AD ∩ HL
Vậy : thiết diện là tứ giác HKMN





b. M ở ngoài đoạn CD:
Trong (BCD), gọi L = KM ∩ BD
Vậy : thiết diện là tam giác HKL

4. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm lấy trên AD và DC .Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE)



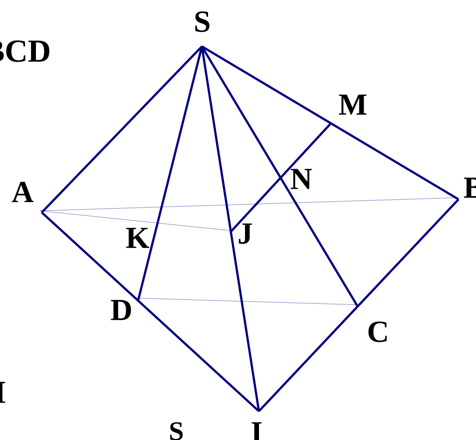
Giải

Trong (SCD), gọi Q = EN ∩ SC
Trong (SAD), gọi P = EM ∩ SA
Trong (ABCD), gọi F = MN ∩ BC
Trong (SBC), gọi R = FQ ∩ SB
Vậy : thiết diện là ngũ giác MNQRP

Cách 2 :Xác định thiết diện bằng cách vẽ giao tuyến phụ :

Bài tập :

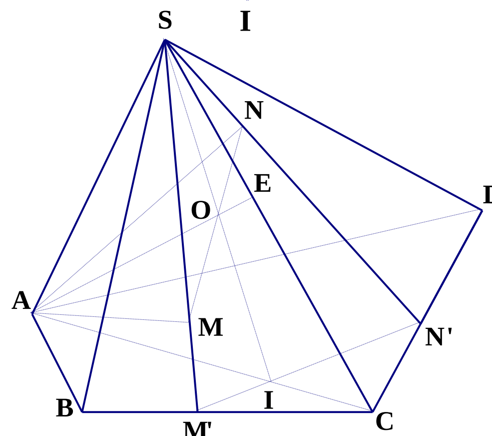
5. Cho hình chóp S.ABCD .Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SC . Giả sử AD và BC không song song .
a. Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC)
b. Xác định thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD



Giải

a. Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC) :
Trong (ABCD) , gọi I = AD ∩ BC
Vậy : SI = *(SAD) ∩ (SBC)*
b. Xác định thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD
Trong (SBC) , gọi J = MN ∩ SI
Trong (SAD) , gọi K = SD ∩ AJ
Vậy : thiết diện là tứ giác AMNK

6. Cho hình chóp S.ABCD.Trong tam giác SBC lấy một điểm M trong tam giác SCD lấy một điểm N.
a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng(SAC)
b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN)
c. Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD



Giải

a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng(SAC):
- Chọn mp phụ (SMN) ⊃ MN
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SMN)
  Ta có : S là điểm chung của (SAC) và (SMN)

Trong (SBC), gọi M’ = SM ∩ BC
Trong (SCD), gọi N’ = SN ∩ CD
Trong (ABCD), gọi I = M’N’ ∩ AC
I ∈ M’N’ mà M’N’ ⊂ (SMN) ⇒ I ∈ (SMN)
I ∈ AC mà AC ⊂ (SAC) ⇒ I ∈ (SAC)
⇒ I là điểm chung của (SMN) và (SAC)
⇒ (SMN) ∩ (SAC) = SI

- Trong (SMN), gọi O = MN ∩ SI
  O ∈ MN
  O ∈ SI mà SI ⊂ (SAC) ⇒ O ∈ (SAC)

Vậy : O = MN ∩ (SAC)

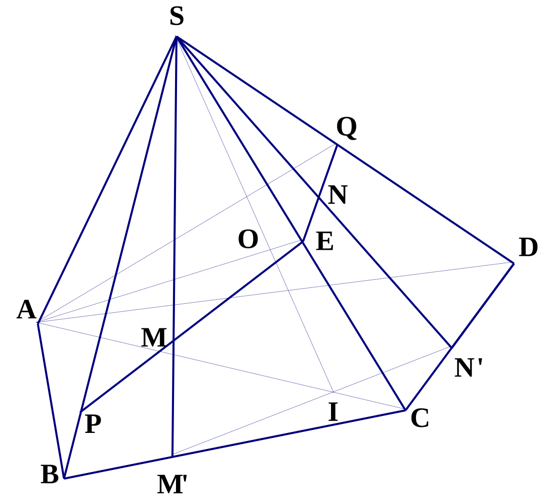
b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN) :

- Chọn mp phụ (SAC) ⊃ SC
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (AMN)
  Ta có : (SAC) ∩ (AMN) = AO
- Trong (SAC), gọi E = AO ∩ SC
  E ∈ SC
  E ∈ AO mà AO ⊂ (AMN) ⇒ E ∈ (AMN)

Vậy : E = SC ∩ (AMN)

c. Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD:

Trong (SBC), gọi P = EM ∩ SB
Trong (SCD), gọi Q = EN ∩ SD
Vậy : thiết diện là tứ giác APEQ



7. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A’, B’ , C’ là ba điểm lấy trên các cạnh SA, SB, SC . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (A’B’C’)

Giải

Trong (ABCD), gọi O = AC ∩ BD
Trong (SAC), gọi O’ = A’C’ ∩ SO
Trong (SBD), gọi D’ = B’O’ ∩ SD
Có hai trường hợp :

- Nếu D’ thuộc cạnh SD thì thiết diện là tứ giác A’B’C’D’
- Nếu D’ thuộc không cạnh SD thì
  Gọi E = CD ∩ C’D’
  F = AD ∩ A’D’
  ⇒ thiết diện là tứ giác A’B’C’EF

